Dynamika hmotného bodu

1. Teleso s hmotnosťou $m = 3\,kg$ sa pohybuje po podložke a jeho polohu v každom časovom okamihu vieme určiť pomocou polohového vektora $\vec{r} = 5t^3\vec{i} + (3t^2 - 2)\vec{j} - 4t\vec{k}$. Určte hybnosť a silu telesa, v čase $t = 5\,s$. Trenie po podložke a odpor vzduchu zanedbajte.

   Riešenie:

   $m = 3\,kg$, $t = 5\,s$, $\vec{r} = 5t^3\vec{i} + (3t^2 - 2)\vec{j} - 4t\vec{k}$

   $\vec{r} = 5t^3\vec{i} + (3t^2 - 2)\vec{j} - 4t\vec{k}$ alebo podľa určenia polohového vektora a dráhy pohybu z kinematiky môžem prepísať ako $s(t) = 5t^3 + (3t^2 - 2) - 4t$ (využijete v príkladoch č.2 a č.3)

   Pre hybnosť platí: $\vec{p} = m \cdot \vec{v} = m \cdot \dfrac{d\vec{r}}{dt} = m \cdot \dfrac{d(5t^3\vec{i} + (3t^2 - 2)\vec{j} - 4t\vec{k})}{dt} = m \cdot (15t^2\vec{i} + 6t\vec{j} - 4\vec{k})$

   Veľkosť vektora hybnosti určíme: $p = |\vec{p}| = \sqrt{(p_x)^2 + (p_y)^2 + (p_z)^2}$.

   Teda pre veľkosť hybnosti v čase $t = 5\,s$ platí: $p(5) = m \cdot \sqrt{(15t^2)^2 + (6t)^2 + (-4)^2} = 3 \cdot \sqrt{(375^2 + 30^2 + 16)} = 1128,66 N \cdot s$.

   Pre silu platí: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{m \cdot d(15t^2\vec{i} + 6t\vec{j} - 4\vec{k})}{dt} = m \cdot (30t + 6 - 0)$.

   Veľkosť vektora sily určíme: $F = \left|\vec{F}\right| = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2}$.

   Teda pre veľkosť sily v čase $t = 5\,s$ platí: $F(5) = m \cdot \sqrt{(30t)^2 + (6)^2 + 0^2} = 3 \cdot \sqrt{(150^2 + 6^2 + 0)} = 450,36 N$.

2. Elektrón v elektrickom poli vo vákuu sa pohybuje tak, že jeho prejdená dráha v metroch závisí na čase podľa vzťahu $s(t) = 20 + 10t - t^2 + 150t^3$. Vypočítajte hybnosť elektrónu a silu, ktorá na elektrón pôsobí v časovom okamihu $t = 50\,s$ (hmotnosť elektrónu je $9,11.10^{-31}\,kg$).
   $\left[p = 1,024.10^{-25}\,\text{N.s},\ F = 4,1.10^{-26}\,\text{N}\right]$, *pozri príklad č.1*

3. V silovom poli sa pohybuje teleso s hmotnosťou $6\,kg$, pričom jeho poloha je v ľubovoľnom časovom okamihu určená polohovým vektorom $\vec{r} = 2t^3\vec{i} + (t^2 - 1)\vec{j} + 8\vec{k}$. Vypočítajte hybnosť telesa a silu pôsobiacu na teleso v časovom okamihu $t = 2\,s$.
   $[p = 145,99\,\text{N.s},\ F = 144,5\,\text{N}]$, *pozri príklad č.1*

4. Auto s hmotnosťou 1 tóna je v pokoji. Začne na neho pôsobiť stála sila veľkosti $1,5\,kN$ (auto sa začne v dôsledku sily pohybovať). Odporové a trecie sily zanedbajte. Vypočítajte:
   a.) zrýchlenie auta,
   b.) rýchlosť auta v časovom okamihu 5 minút od začiatku pôsobenia sily,
   c.) dráhu, ktorú auto prejde za pol hodiny od začiatku pohybu (pôsobenia sily).
   $\left[a = 1,5\,m \cdot s^{-2}, v = 450\,m \cdot s^{-1}, s = 2430\,km\right]$, *pozri základné vzorce v prezentáciach z dynamiky a kinematiky*

5. Na vozík s hmotnosťou $3,5\,kg$, ktorý je v pokoji na rovnej podložke, začne pôsobiť stála sila veľkosti $6\,N$. Odporové a trecie sily zanedbajte. Aká bude hybnosť vozíka v časovom okamihu $10\,s$?
   $[p = 60\,N \cdot s]$, *pozri základné vzorce v prezentáciach z dynamiky a kinematiky*

KPFIVT TUKE

6. Električka s hmotnosťou $20\,t$ sa pohne zo zástavky a pohybuje sa po priamej trati so stálym zrýchlením s veľkosťou $0,4\,m\cdot s^{-2}$. Po uplynutí času $15\,s$ od začiatku pohybu vodič vyplne motor a električka sa až do zastavenia pohybuje rovnomerne spomalene. Počas pohybu pôsobia na električku odporové a trecie sily s celkovou veľkosťou $2\,kN$. Určte:
a.) veľkosť najvyššej dosiahnutej rýchlosti,
b.) veľkosť zrýchlenia počas brzdenia,
c.) čas pohybu električky až do zastavenia,
d.) veľkosť ťažnej sily pri rozbiehaní
$\left[v = 21,6\,km\cdot h^{-1}, a = 0,1\,m\cdot s^{-2}, t = 75\,s, F = 10\,kN,\right]$, *pozri základné vzorce v prezentáciach z dynamiky a kinematiky*

7. Strela s hmotnosťou $10\,kg$ letiaca pozdĺž železničnej trate rýchlosťou $500\,m.s^{-1}$ narazila do vagóna s pieskom s hmotnosťou $5\,t$ a uviazla v ňom. Vypočítajte akou rýchlosťou a ktorým smerom sa bude vagón pohybovať po náraze, ak pred zrážkou mal rýchlosť $25\,km.h^{-1}$ a pohyboval sa

   a) v smere strely,

   b) oproti strele.

   $\left[v = 28,51\,\mathrm{km.h^{-1}}\right.$ v smere strely, $v = 21,35\,\mathrm{km.h^{-1}}$ v protimere strely$\left.\right]$,
   pozri príklady z prednášky na použitie zákona zachovania hybnosti

8. Po dráhe sa tým istým smerom valia dve gule. Menšia guľa má hmotnosť $2\,kg$ a rýchlosť $2,5\,m.s^{-1}$, väčšia má hmotnosť $3,5\,kg$. Vypočítajte rýchlosť, ktorou sa valí väčšia guľa, ak po zrážke sa obidve gule chvíľu valia spolu rýchlosťou $2,1\,m.s^{-1}$.
$\left[v = 1,87\,\mathrm{m.s^{-1}}\right]$, *pozri príklady z prednášky na použitie zákona zachovania hybnosti*

9. Pri brehu stojí loďka s hmotnosťou $25\,kg$, v ktorej sedí jazvečík. Keď jazvečík z loďky vyskočí rýchlosťou $3\,m.s^{-1}$, loďka sa začne pohybovať od brehu rýchlosťou $0,8\,m.s^{-1}$. Vypočítajte hmotnosť jazvečíka.
$[m_j = 6,67\,\mathrm{kg}]$, *pozri príklady z prednášky na použitie zákona zachovania hybnosti*

10. Strela s hmotnosťou $20\,g$ zasiahne strom rýchlosťou $400\,m.s^{-1}$. Vypočítajte ako hlboko strela do stromu prenikne, ak priemerný odpor dreva je $10\,kN$.

    Riešenie:

    $m = 20\,g = 0,02\,kg$, $v_0 = 400\,m.s^{-1}$, $v = 0\,m.s^{-1}$, $F = 10\,kN = 10^4\,N$, $s_0 = 0$, $s = ?$
    Strela pri náraze do stromu sa ďalej pohybuje rovnomerne spomaleným pohybom, pre ktorý platí:
    $s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}at^2$, $v = v_0 - at$
    Zo vzťahu pre silu $F = ma$ si vyjadríme zrýchlenie: $a = \frac{F}{m}$.
    Zo vzťahu pre rýchlosť $v = v_0 - at$ si vyjadríme čas: $t = \frac{v_0 - v}{a} = \frac{v_0 - 0}{\frac{F}{m}} = \frac{v_0 m}{F}$.
    Dosadíme do vzťahu pre dráhu: $s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}at^2 = 0 + v_0\frac{v_0 m}{F} - \frac{1}{2}\frac{F}{m}\frac{(v_0)^2 m^2}{F^2} = \frac{1}{2}\frac{(v_0)^2 m}{F} = \frac{1}{2}\frac{(400)^2 0,02}{10^4} = 0,16\,m$

11. Teleso sa pohybuje v gravitačnom poli rýchlosťou $v_0 = 12\,m.s^{-1}$. V istom časovom okamihu na neho začne pôsobiť konštantná sila F v smere jeho pohybu, ktorá je dvojnásobne väčšia ako gravitačná sila

KPHEVT TUKE

F_G. Vypočítajte za aký čas sa rýchlosť telesa strojnásobí a akú dráhu teleso za tento čas prejde, ak na neho nepôsobí žiadna iná sila.
$[t = 1,22\,s, s = 29,24\,m]$, *pozri príklad č.1O, pomôcka:* $F = 2F_G$, $v = 3v_0$

12. Lietadlo s hmotnosťou $12\,t$ má rýchlosť $252\,km.h^{-1}$. Celková ťahová sila jeho motorov je $20\,kN$, pričom 25% tejto sily pripadá na prekonanie trenia a odporu vzduchu. Vypočítajte aká musí byť dĺžka štartovacej dráhy lietadla.
$[s = 1,96\,km]$, *pozri príklad č.1O*

13. Nádoba naplnená vodou upevnená na lane dlhom $75\,cm$ sa rovnomerne otáča vo zvislej rovine. Vypočítajte pri akej minimálnej rýchlosti otáčania voda z nádoby nevytečie.
$\left[v = 2,71\,m.s^{-1}\right]$, *pozri z prednášky Dynamika, časť Druhy síl a ich veľkosť, pomôcka:* $F_o = F_G$

14. Guličkа s hmotnosťou $100\,g$ je upevnená na niti dlhej $15\,cm$. Pevnosť nite je $10\,N$. Vypočítajte s akou frekvenciou musíme guličku točiť vo vodorovnom smere na podložke, aby niť praskla.
$[f = 4,11\,Hz]$, *pozri z prednášky Dynamika, časť Druhy síl a ich veľkosť, pomôcka:* $F_p = F_d$

15. Aká dostredivá sila pôsobí na guľôčku s hmotnosťou $0,5\,kg$ upevnenú na niti s dĺžkou $1\,m$, ak gulôčka koná rovnomerný pohyb po kružnici rýchlosťou $3\,m.s^{-1}$ vo vodorovnej rovine? $[F = 4,5\,N]$, *pozri z prednášky Dynamika, časť Druhy síl a ich veľkosť*

16. Auto ide po vodorovnej vozovke konštantou rýchlosťou $72\,km.h^{-1}$. Vypočítajte na akej najkratšej vzdialenosti môže auto zastaviť, ak súčiniteľ šmykového trenia medzi pneumatikami a vozovkou je $0,25$.

Riešenie:

$v = 72\,km.h^{-1} = 20\,m.s^{-1}$, $f = 0,25$
Auto si predstavíme ako hmotný objekt vo vzťažnej súradnicovej sústave. Na auto pôsobia sily v smere osi x (trecia sila F_T a tiaž motora auta G, $\vec{F_T} = \vec{G}$) a v smere osi y (tiažová (gravitačná) sila F_G a normálová sila N, $\vec{F_G} = \vec{N}$).
Pre silu platí: $F = ma$, čo môžeme prepísať aj pre výslednicu síl: $\sum F_i = ma$.
V smere osi y platí: $\vec{F_G} = \vec{N} \Rightarrow F_G = N \Rightarrow mg = N \Rightarrow N = mg$.
V smere osi x platí: $\vec{F_T} = \vec{G} \Rightarrow F_T = G \Rightarrow F_T = F_G \Rightarrow fN = ma \Rightarrow fmg = ma \Rightarrow a = fg$.
Auto sa pohybuje rovnomerne spomaleným pohybom, teda platí: $v = v_0 - at \Rightarrow 0 = v_0 - at \Rightarrow t = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{fg}$.
Pre dráhu pohybu auta platí: $s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 = v_0\frac{v_0}{fg} - \frac{1}{2}fg\left(\frac{v_0}{fg}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{fg} = \frac{1}{2}\frac{20^2 m^2 s^{-2}}{0,25 \cdot 9,81 m \cdot s^{-2}} = 81,55\,m$

17. Vlak s hmotnosťou $1200\,t$ má pri rozbiehaní dosiahnuť rýchlosť $15 m.s^{-1}$ za $45\,s$. Vypočítajte veľkosť sily, ktorú musí vlak vyvinúť, ak súčiniteľ šmykového trenia kolies vlaku je $0,005$.
$[F = 458,86\,kN]$, *pozri príklad č.16*

18. Aká veľká sila udelí kvádru s hmotnosťou $100\,kg$ na vodorovnej rovine zrýchlenie $2\,m.s^{-2}$, ak koeficient šmykového trenia je $0,02$?

KPH FTUKE

$[F = 219,62\,N]$, *pozri príklad č.16*

19. Urči rameno válivého odporu pre pohyb automobilu po asfaltovej ceste, ak je na vodorovnej ceste možné roztlačit automobil o hmotnosti $1600\,kg$ už silou $300\,N$. Priemer kolies je $60\,cm$.
$[\epsilon = 0,0057\,m]$, *pozri z prednášky Dynamika, časť Druhy síl a ich veľkosť*

20. Urči rameno válivého odporu u nákladného automobilu o hmotnosti $1\,t$, pokiaľ ho má utiahnuť muž, ktorý dokáže vyvinúť ťažnú silu $1\,kN$. Priemer kolies je $70\,cm$.
$[\epsilon = 0,036\,m]$, *pozri z prednášky Dynamika, časť Druhy síl a ich veľkosť*

21. Urči akú najväčšiu hmotnosť môže utiahnúť človek, ktorý je schopný ťaháť silou $400\,N$, ak:
a) posúva (šúcha) bedňu po podlahe s koeficientom trenia $0,7$,
b) bedňu podloží tyčkou s priemerom $6\,cm$ a ramenom $0,005\,m$ na plot a takto ju posúva.
$[m = 58,25\,kg, m = 244,65\,kg]$, *pozri z prednášky Dynamika, časť Druhy síl a ich veľkosť*

KPHV FVT TUKE